ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 1978

OPTION P'

# PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES ( 4 h )

E est un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 3$ sur le corps $\mathbb{R}$ . On désigne par $\mathfrak{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E et par I son élément-unité (c'est-à-dire l'application $x \mapsto x$) . $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E .

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.

A tout nombre réel t on associe l'endomorphisme $f_t$ de E tel que, quel que soit $i \in \{1, \ldots, n\}$, on ait

$$f_t(e_i) = \sum_{j=i}^{n} \frac{t^{j-i}}{(j-i)!} e_j$$

(étant entendu que l'on pose $0! = 1$ et $0^0 = 1$) .

## Partie I

I - 1°/ a) Expliciter $f_0$ .

b) Montrer que, quels que soient $t \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}$, on a

$$f_t \circ f_u = f_{t+u} .$$

c) Montrer que, quel que soit $t \in \mathbb{R}$, $f_t$ est bijectif et expliciter $f_t^{-1}$ .

I - 2°/ Montrer qu'il existe un endomorphisme g de E et un seul, tel que, quel que soit $t \in \mathbb{R}$, on ait

$$f_t = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^j}{j!} g^j$$

(on pose toujours $0! = 1$ et $0^0 = 1$ ; et, suivant que j est nul, ou non, $g^j$ est égal à I ou au composé de j endomorphismes coïncidant avec g) . Expliciter la matrice de g relative à la base $(e_1, \ldots, e_n)$ .

I - 3°/ On désigne par H l'ensemble des endomorphismes h de E tels que, quel que soit $t \in \mathbb{R}$, on ait

$$f_t \circ h = h \circ f_t .$$

Montrer que H est aussi l'ensemble des endomorphismes h de E tels que l'on ait

.../...

$$g \circ h = h \circ g \ .$$

I - 4°/ Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Expliciter une base de ce sous-espace.

## Partie II

Dans la suite, on appelle *orbite* d'un élément x de E et l'on désigne par $\Gamma(x)$ l'ensemble des éléments de la forme $f_t(x)$, t décrivant $\mathbb{R}$. On dit que x est *invariant* si l'on a $\Gamma(x) = \{x\}$.

II - 1°/ On définit dans E une relation $\mathcal{R}$ en disant que deux éléments x et y de E sont liés par $\mathcal{R}$ si, et seulement si, y appartient à $\Gamma(x)$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

II - 2°/ Pour $t \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, expliciter les coordonnées de $f_t(x)$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$, en fonction de t et des coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ de x.

II - 3°/ Déterminer l'ensemble des éléments invariants de E.

II - 4°/ Dans le cas $n = 3$, étudier les orbites des divers éléments de E.

## Partie III

On dit qu'une application de E dans $\mathbb{R}$ est *invariante* si sa restriction à chaque orbite est constante. On désigne par $\varphi$ la bijection de E sur $\mathbb{R}^n$ associant à tout élément de E la suite de ses coordonnées dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

Les notions de limite et de continuité qui interviennent dans les questions III - 1°/ et III - 2°/ sont relatives à une norme quelconque définie sur E.

III - 1°/ Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$a_p = \frac{1}{p} e_{n-2} + e_{n-1} \ .$$

Trouver une suite $(b_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de E telle que, quel que soit $p \in \mathbb{N}^*$, $b_p$ appartienne à $\Gamma(a_p)$ et que l'on ait

$$\lim_{p \to \infty} b_p = - e_{n-1} \ .$$

III - 2°/ Trouver deux éléments x et y de E tels que $\Gamma(x)$ et $\Gamma(y)$ soient distinctes et que, pour toute application F de E dans $\mathbb{R}$, invariante et continue, les restrictions de F à $\Gamma(x)$ et $\Gamma(y)$ aient la même valeur.

III - 3°/ Soit G une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, dont toutes les dérivées partielles premières existent et soient continues. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $G \circ \varphi$ soit invariante est que G vérifie en tout point de $\mathbb{R}^n$ l'équation

.../...

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i \frac{\partial G(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_{i+1}} = 0$$

III - 4°/ Jusqu'à la fin du problème, on se place dans le cas $n = 3$ .

On dit qu'une application $P$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ est une *fonction-polynôme* s'il existe une partie finie, non vide, $K$ de $\mathbb{N}^3$ et une famille $(\alpha_{k_1 k_2 k_3})$ de nombres réels, indexée sur $K$ , telles que, quels que soient $x_1 \in \mathbb{R}$ , $x_2 \in \mathbb{R}$ et $x_3 \in \mathbb{R}$ , on ait

$$P(x_1, x_2, x_3) = \sum_{(k_1, k_2, k_3) \in K} \alpha_{k_1 k_2 k_3} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} .$$

On pourra considérer comme connu le fait que, si $P$ est la fonction nulle, les seuls couples $(K, (\alpha_{k_1 k_2 k_3}))$ satisfaisant à la condition donnée sont ceux pour lesquels, quel que soit $(k_1, k_2, k_3) \in K$ , on a $\alpha_{k_1 k_2 k_3} = 0$ . Etant donné un élément $k$ de $\mathbb{N}$ , on dit que la fonction-polynôme $P$ est *homogène, de degré* $k$ , s'il existe un couple $(K, (\alpha_{k_1 k_2 k_3}))$ satisfaisant à la condition donnée et tel que, quel que soit $(k_1, k_2, k_3) \in K$ , on ait $k_1 + k_2 + k_3 = k$ et $\alpha_{k_1 k_2 k_3} \neq 0$ (un tel couple est alors unique) .

Montrer qu'il existe

a) une fonction-polynôme homogène $P_1$ , de degré 1 , et une seule, telle que $P_1 \circ \varphi$ soit invariante et qui vérifie en tout point de $\mathbb{R}^3$ l'équation

$$\frac{\partial P_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} = 1 ;$$

b) une fonction-polynôme homogène $P_2$ , de degré 2 , et une seule, telle que $P_2 \circ \varphi$ soit invariante et qui vérifie en tout point de $\mathbb{R}^3$ les équations

$$\frac{\partial^2 P_2(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^2} = 0 , \quad \frac{\partial^2 P_2(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2^2} = -1 .$$

Expliciter $P_1$ et $P_2$ .

III - 5°/ Trouver (dans le cas $n = 3$) tous les couples $(x, y)$ d'éléments de $E$ satisfaisant aux conditions données dans la question III - 2°/ .

III - 6°/ Soit $P$ une fonction-polynôme sur $\mathbb{R}^3$ . Montrer qu'il existe un élément $q$ de $\mathbb{N}$ et une fonction-polynôme $Q$ sur $\mathbb{R}^3$ tels que, quels que soient $x_1 \in \mathbb{R}$ , $x_2 \in \mathbb{R}$ et $x_3 \in \mathbb{R}$ , on ait

$$x_1^q P(x_1, x_2, x_3) = Q(x_1, x_2, P_2(x_1, x_2, x_3)) .$$

Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur $Q$ , pour que $P \circ \varphi$ soit invariante. En déduire l'expression générale des fonctions-polynômes $P$ telles que $P \circ \varphi$ soit invariante.

X X X

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail